Prof Dr. R. Kree — Sommersemester 2002
Dr. A. Hartmann — Präsenzübungen 1, 10.4.2002

Übungen zur Thermodynamik und Statistik

Aufgabe 1: (Transformation von Zufallsgrößen)
Gegeben sei eine Zufallsgröße X mit Wahrscheinlichkeitsdichte $p_X(x)$ und Verteilungsfunktion $F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tilde{x})d\tilde{x}$, also $f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x)$

a. Die Zufallsgröße Y entstehe durch die Transformation $Y = H(X)$ aus X. H sei streng monoton. Wie lautet die Wahrscheinlichkeitsdichte $p_Y(y)$ von Y?

b. Sei X gleichverteilt in $(0, 1]$. Wie lautet $p_X(x)$?

c. Sei $H(x) = -\log(x)$. Wie ist $Y = H(X)$ verteilt?

d. Erstellen Sie ein kurzes C Programm, das N Zufallszahlen erzeugt, die gemäß der Exponentialverteilung $p(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $(x \geq 0)$ verteilt sind. Das Programm soll in der folgenden Form aufrufbar sein:

```
exponential <N> <lambda>
```

Das Programm sollte ein normiertes Histogramm im Bereich $[0, 10/\lambda]$ mit 100 Elementen erstellen und als Liste

x,Häufigkeit im Intervall $[x - \delta x/2, x + \delta x/2)$

ausgeben.

e. Erzeugen Sie Daten für $N = 10000$ mit $\lambda = 1$ sowie $\lambda = 3$. Plotten Sie die Histogramm mit Hilfe von Gnuplot zusammen mit den Dichten $p(x)$ in linear sowie einfach logarithmischer Darstellung.

Aufgabe 2: (Dichteoperator)
Zeigen Sie folgende Eigenschaften des Dichteoperators ($\hat{\rho} = \sum_i w_i|i\rangle\langle i|$)

a. $\hat{\rho}$ ist hermitesch: $\hat{\rho}^+ = \hat{\rho}$

b. $\hat{\rho} \geq 0$, d.h. $\langle a|\hat{\rho}|a\rangle \geq 0 \; \forall \, |a\rangle$.

c. Sei $\{|i\rangle\}$ ein Orthonormalsystem. Zeigen Sie: $\hat{\rho}$ ist rein $\Leftrightarrow \hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$.

d. Berechnen Sie die Bewegungsgleichung für den Dichteoperator.