Prof Dr. R. Kree
Dr. A. Hartmann

Sommersemester 2002
15.Mai 2002

Klausur 1

Aufgabe 1: Erzeugung von Zufallszahlen (12 Punkte)

a. Wie kann man Zufallszahlen (x) erzeugen, die gemäß der Exponentialverteilung mit Dichte $p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$, $\lambda > 0$) verteilt sind? — 3 Punkte

b. Berechnen Sie die Dichte $q_{\lambda,2}(x)$ der Summe zweier mit Parameter λ exponentiell verteilter Zufallszahlen, indem sie das Integral $\int_0^x p_\lambda(z)p_\lambda(x-z)dz$ ausrechnen. — 3 Punkte

c. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass die Dichte der n-fachen Summe von mit Parameter λ exponentiell verteilten Zufallszahlen die Gamma-Verteilung $q_{\lambda,n}(x) = \frac{e^{-\lambda x}\lambda^n x^{n-1}}{(n-1)!}$ ($x \geq 0$) ergibt. — 4 Punkte

d. Wie erzeugt man Zufallszahlen, die gemäß $q_{\lambda,n}(x)$ verteilt sind? — 2 Punkte

Aufgabe 2: Mittelwert und Varianz (10 Punkte)

a. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz folgender diskreter Zufallsgröße: — 4 Punkte

x	1	2	3	4	5	6
$p(x)$	1/4	1/6	1/12	1/6	1/6	1/6

b. Berechnen Sie Mittelwert und Varianz der Exponentialverteilung mit Dichte $p_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ($x \geq 0$, $\lambda > 0$). — 6 Punkte

Aufgabe 3: Sattelpunktsintegrale (10 Punkte)

a. Begründen Sie, dass im Grenzfall $N \to \infty$ unter der Annahme, dass $g(x)$ an der Stelle x_0 sein einziges Maximum hat: — 5 Punkte

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{Ng(x)}dx \approx \sqrt{\frac{2\pi}{-Ng''(x_0)}}e^{Ng(x_0)}$$

b. Berechnen Sie $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-N(x-2)^2}(x^2-4x+5)^{-N}dx$ näherungsweise im Grenzfall $N \to \infty$. — 5 Punkte

Aufgabe 4: Mikrokanonische Gesamtheit (9 Punkte)
Betrachten Sie ein System aus N ($N \gg 1$) lokalisierten $S = \frac{1}{2}$ Spins im Magnetfeld $B\underline{e}_z$. Es seien $N_\uparrow$ die Zahl der Spins, die parallel, und $N_\downarrow$ die Zahl der Spins, die antiparallel zum Feld ausgerichtet sind. Das System habe die Energie

$$E = -(N_\uparrow - N_\downarrow)\mu_B B = -M\mu_B B.$$

a. Zeigen Sie, dass sich in der mikrokanonischen Gesamtheit für die Entropie $S(N,M) = 0.5k_B\left[(N+M)\ln\frac{2N}{N+M} + (N-M)\ln\frac{2N}{N-M}\right]$ ergibt. 5 Punkte
TIP: Verwenden Sie die Stirling Formel.

b. Berechnen Sie daraus die Temperatur als Funktion von N und M. 4 Punkte

Aufgabe 5: Kanonische Gesamtheit (10 Punkte)
Leiten Sie die Verteilungsfunktion der kanonischen Gesamtheit auf alternativem Weg her. Betrachten Sie dazu ein Übersystem von M physikalisch gleichwertigen Systemen jeweils im Kontakt mit einem Wärmebad bei Temperatur T. Jedes System habe die diskreten Energien E_m mit Eigenzuständen $|m\rangle$. Sei n_m die Anzahl der Systeme im Zustand $|m\rangle$.
Verwenden Sie dazu, dass in diesem Fall die Gesamtenergie E_t scharf ist (also als konstant angesehen werden kann), ebenso natürlich die Zahl M der Systeme.
Schrittweise:

a. Bestimmen Sie die Zahl $W(\{n_m\})$ der Realisierungsmöglichkeiten für eine Verteilung $\{n_m\}$ der M Systeme auf die Zustände. Geben Sie die Randbedingungen an. 3 Punkte

b. Maximieren Sie W und arbeiten Sie die zwei Randbedingungen für M, E_t mit Hilfe von Lagrangeschen Multiplikatoren λ_1, λ_2 ein. Was ergibt sich für n_m? 3 Punkte

c. Berechnen Sie die Lagrangeschen Multiplikatoren. Verwenden Sie dazu, dass das Phasenvolumen $\Gamma(E_t)$ des Gesamtsystems wegen der Schärfe der Verteilung ungefähr gleich W ist, also $\ln\Gamma(E_t) \approx \ln W_{\max}$. 4 Punkte

Aufgabe 6: Harmonische Oszillatoren (10 Punkte)
Betrachten Sie N *unterscheidbare* klassische harmonische Oszillatoren (Masse m, Frequenz ω) mit Hamiltonfunktion

$$H(q_i,p_i) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q_i^2\right) \tag{1}$$

a. Berechnen Sie die Zustandssumme $Z(T,N)$ 5 Punkte
(Ergebnis: $Z(T,N) = (k_BT/\hbar\omega)^N$).

b. Berechnen Sie freie Energie, Entropie und chemisches Potential. 5 Punkte

Hinweis: Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Lösungen stets mit Ihrem **Namen** und mit **Name des Leiters und Nummer Ihrer Übungsgruppe** beschriftet und zusammengeheftet sind.
Es sind keinerlei Hilfsmittel (außer Papier und Schreibmaterial) erlaubt.