Prof Dr. R. Kree
Dr. A. Hartmann

Sommersemester 2002
Blatt 2

# Übungen zur Thermodynamik und Statistik

Abgabe am Montag, den 22. April 2002, 11:00 Uhr (Übungskästen)

**Aufgabe 4:** Kugelvolumen, Monte-Carlo Integration (21 Punkte)

a. Berechnen Sie das Volumen $V_N(R)$ und die Oberfläche $A_N(R)$ der $N$-dimensionalen Kugel mit Radius $R$. *7 Punkte*

   *TIP:* Berechnen Sie $\int d^N x\, e^{-\underline{x}^2}$ sowohl durch Verwendung des Ergebnisses von Blatt 1 als auch in Kugelkoordinaten und verwenden Sie die Definition der $\Gamma$-Funktion $\Gamma(n) = \int_0^\infty dt\, t^{n-1} e^{-n}$.

b. Berechnen Sie den Anteil von einer $N$-dimensionalen Kugelschale mit Radius $R$ und Dicke $\Delta R$ an $V_N(R)$. Was ergibt sich im Grenzfall $N \to \infty$? *2 Punkte*

c. Sei $C_N \equiv V_N(1)$. Was ist $C_{N-2}/C_N$ für $N \geq 3$? *1 Punkt*

d. Erstellen Sie ein kurzes C Programm, das in einer Schleife über verschiedene Dimensionen $N$ die Volumina $C_N$ der $N$-dimensionalen Einheitskugeln berechnet. Dazu soll jeweils eine Monte-Carlo Integration verwendet werden, die $K$ zufällige $N$-dimensionale Vektoren in $[-1, 1]^N$ erzeugt. Das Programm soll in der folgenden Form aufrufbar sein: *7 Punkte*

```
sphere <K> <N_max>
```

   Das Programm sollte für $N = 3, 4, \ldots, N_{\max}$ das Verhältnis $C_{N-2}/C_N$ ausgeben.

e. Lassen Sie das Programm mit $N_{\max} = 13$ und $K = 10^6$ laufen. Fitten Sie mittels `gnuplot` die Kurve $f(N) = N/(2a)$ an die Daten. (*TIP*: Informieren Sie sich mittels `help fit` innerhalb von `gnuplot`). Geben Sie an, welche `gnuplot`-Befehle Sie verwendet haben. Was erhalten Sie für $a$? Erstellen Sie einen Plot, der die Daten zusammen mit der gefitteten Funktion zeigt. *4 Punkte*

**Aufgabe 5:** Entropie des idealen Gases (14 Punkte)

- Berechnen Sie für das ideale Gas bestehend aus $N$ Teilchen im Volumen $V$ mit Hamiltonian $H(\underline{p}, \underline{q}) = \sum_{i=1}^{N} \underline{p}_i^2/2m$ das Phasenraumvolumen *4 Punkte*

$$\omega(E) \equiv \frac{1}{N!} \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3N}} \int d^{3N}p d^{3N}q \, \delta(E - H(\underline{p}, \underline{q})) \tag{1}$$

- Berechnen Sie die Entropie $S \equiv k_b \ln \omega(E)$. Verwenden Sie dabei die Stirlingformel. Ist $S$ extensiv? *5 Punkte*
- Berechnen Sie die Temperatur mittels $1/T \equiv \frac{\partial S}{\partial E}\Big|_{V,N}$ *3 Punkte*
- Berechnen Sie die Entropie bei $T = 0$. Vergleichen Sie das Ergebnis mit dem dritten Hauptsatz der Thermodynamik. *2 Punkte*

**Hinweis:** Bitte achten Sie darauf, dass Ihre Lösungen stets mit Ihrem **Namen** und der **Nummer Ihrer Übungsgruppe** beschriftet und zusammengeheftet sind. Werfen Sie die Lösungen am Montag jeweils bis spätestens 11:00 Uhr in die dafür bestimmten Kästen ein! Die Kästen werden um diese Zeit geleert, und die Lösungen unmittelbar an die Leiter der einzelnen Übungsgruppen weitergegeben. Senden Sie bis zum gleichen Zeitpunkt Ihre erstellten Programme per email an Ihren Betreuer.