Prof. Dr. G. Hegerfeldt — Sommersemester 2001
Dr. M. Weigt — Blatt 8

Übungen zur Elektrodynamik

Abgabe Mittwoch, den 27.6.2001, 12:00 Uhr (Übungskästen)

Aufgabe 22: (Brechungsgesetz nach Snellius) In den Halbräumen $x_1 < 0$ bzw. $x_1 > 0$ seien μ_1, ε_1 bzw. μ_2, ε_2 gegeben. Es gelte $\mu_1\varepsilon_1 < \mu_2\varepsilon_2$. Im Halbraum $x_1 < 0$ fällt eine eben Welle auf die Grenzfläche $x_1 = 0$. Zeigen Sie, dass aus den Maxwellgleichungen und den Randbedingungen folgt, dass zugleich eine reflektierte Welle im Halbraum $x_1 < 0$ und eine gebrochene Welle im Halbraum $x_1 > 0$ auftreten. Welche Gesetzmäßigkeit besteht zwischen den Winkeln, die diese drei Wellen mit der Flächennormalen der Grenzfläche bilden? *6 Punkte*

Hinweis: Die Randbedingungen auf der Grenzfläche sind die gleichen wie in der Elektrostatik bzw. Magnetostatik

Aufgabe 23: (Totalreflexion) In den Halbräumen $x_1 < 0$ bzw. $x_1 > 0$ seien μ_1, ε_1 bzw. μ_2, ε_2 gegeben. Es gelte $\mu_1\varepsilon_1 > \mu_2\varepsilon_2$. Im Halbraum $x_1 < 0$ fällt eine eben Welle der Form *6 Punkte*

$$\vec{E}^{(I)}(\vec{x},t) = E^{(I)}\vec{e}_2 \cos(k_1x_1 + k_3x_3 - \omega t)$$

auf die Grenzfläche. Der Winkel zwischen $\vec{k} = (k_1, 0, k_3)$ und der Flächennormalen sei α, und es gelte $\sin^2(\alpha) > \frac{\mu_2\varepsilon_2}{\mu_1\varepsilon_1}$. Zeigen Sie, dass aus den Maxwellgleichungen und den Randbedingungen für die reflektierte Welle $\vec{E}^{(R)}$ und die transmittierte Welle $\vec{E}^{(T)}$ folgt:

$$\vec{E}^{(R)}(\vec{x},t) = E^{(R)}\vec{e}_2 \cos(-k_1x_1 + k_3x_3 - \omega t)$$

$$\vec{E}^{(T)}(\vec{x},t) = E^{(T)}\vec{e}_2 e^{-\kappa x_1} \cos(k_3x_3 - \omega t)\ .$$

Bestimmen Sie $\kappa > 0$ und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 24: Gegeben seien eine linear polarisierte elektromagnetische Welle mit *6 Punkte*

$$\vec{E}^{(l)}(\vec{x},t) = E\vec{e}_2 \cos(\frac{\omega}{c}x_1 - \omega t)$$

und eine zirkular polarisierte Welle mit

$$\vec{E}^{(z)}(\vec{x},t) = E\left[\vec{e}_2 \cos(\frac{\omega}{c}x_1 - \omega t) + \vec{e}_3 \sin(\frac{\omega}{c}x_1 - \omega t)\right]\ .$$

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Maxwellgleichungen im Vakuum die zugehörigen magnetischen Felder $\vec{B}^{(l)}(\vec{x},t)$ und $\vec{B}^{(z)}(\vec{x},t)$.
b) Visualisieren Sie mittels MuPAD das Fortschreiten dieser Wellen, indem Sie

$\vec{E}^{(l)}$ und $\vec{E}^{(z)}$ entlang der x_1-Achse als Funktion von $\frac{\omega\vec{x}}{c} = (\frac{\omega x_1}{c}, 0, 0)$ im Intervall $\frac{\omega x_1}{c} \in (-2\pi, 2\pi)$ für die zwei Zeitpunkte $\omega t = 0/1$ plotten.
Hinweis: Für $\vec{E}^{(l)}$ genügt ein Plot in der $x_1 - x_2$–Ebene. $\vec{E}^{(z)}$ kann mit dem Befehl `plot3d` parametrisch dargestellt werden. Vektoren werden durch das graphische Primitiv `polygon` definiert, der Übersichtlichkeit halber können die Pfeilspitzen weggelassen werden. Weitere Infos können Sie auf den Hilfeseite von MuPAD unter `?plot3d` finden.

Zusatzaufgabe: (allgemeine Lösung der freien Maxwellgleichungen) In der Coulomb-Eichung kann man $\phi(\vec{x}, t) = 0$ wählen, wenn $\rho = 0$ und $\vec{j} = 0$ gelten. Zeigen Sie mit Hilfe der Fouriertransformation, dass dann die allgemeine Lösung für $\vec{A}(\vec{x}, t)$ im polarisierbaren Medium (μ, ε) von der Form *4 Punkte*

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}, t) &= \sum_{\lambda=1}^{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon\mu\omega}} \\ &\quad \times \left\{ \vec{\epsilon}^{\,(\lambda)}(\vec{k}) a_\lambda(\vec{k}) e^{-i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} + \vec{\epsilon}^{\,(\lambda)}(\vec{k}) a_\lambda^*(\vec{k}) e^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{x})} \right\}\end{aligned}$$

ist (Der Vorfaktor ist Konvention, wird aber so in der Quantentheorie benötigt). Dabei gilt

$$\omega(k) = \frac{ck}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\ , \qquad k = |\vec{k}|\ ,$$

und für jedes $\vec{k}$ sind $\vec{\epsilon}^{\,(1)}(\vec{k})$ und $\vec{\epsilon}^{\,(2)}(\vec{k})$ zwei reelle Einheitsvektoren, die mit $\vec{k}$ ein rechtsgerichtetes Orthonormalsystem bilden. Die komplexwertigen Funktionen $a_1(\vec{k})$ und $a_2(\vec{k})$ sind frei wählbar. Wie sehen die zugehörigen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ aus? Wie sieht die Lösung aus, wenn man zirkular polarisierte ebene Wellen benutzt?